



APROXIMAÇÃO DO SISTEMA LOTKA-VOLTERRA FRACIONÁRIO.

FELIPE, Leonardo.¹
CHIMBIDA, Janete Terezinha.²

RESUMO

O presente trabalho aproxima a solução analítica do sistema de Lotka-Volterra, o qual é modelado por equações diferenciais fracionárias e resolvidas pelo Método de Perturbação Homotópica (MPH). Os resultados numéricos, apresentados graficamente, mostram a eficiência do (MPH), bastando poucas iterações para obter soluções aproximadas acuradas. O efeito da derivada de ordem fracionária para o modelo matemático populacional proposto é discutido.

PALAVRAS-CHAVE: Modelo de Lotka-Volterra, Equação diferencial fracionária, Método de perturbação homotópica.

APROXIMACIÓN DEL SISTEMA LOTKA-VOLTERRA FRACCIONARIO

RESUMEN

En el presente trabajo estudiamos la aproximación de la solución analítica del sistema Lotka-Volterra, el cual es modelado por ecuaciones diferenciales fraccionarias y solucionado por el método de Perturbación Homotópica (MPH). Los resultados numéricos, que son presentados graficamente, retratan la eficiencia del (MPH), siendo suficiente pocas iteraciones para obtener soluciones aproximadas razonablemente exactas. El efecto de la derivada de orden fracionario para el modelo matemático poblacional propuesto, también es analizado.

PALABRAS-CLAVE. Modelo de Lotka-Volterra, Ecuación diferencial fraccionaria, Método de perturbación homotópica.

1. INTRODUÇÃO

Estudos em dinâmica populacional têm atraído a atenção de pesquisadores de diferentes áreas, que impulsionados pelo avanço da ciência e tecnologia, têm conseguido desenvolver modelos matemáticos que retratam bem, através de simulações e soluções aproximadas, sistemas ecológicos complexos. Esta complexidade apresentada pelas populações é devido as influências externas, relativas à interação com o ambiente e influências internas, consequências dos interesses conflitantes entre os indivíduos do ecossistema.

Os primeiros modelos matemáticos sobre populações foram os de (MALTHUS, 1798), que prevê o crescimento exponencial e o crescimento logístico de (VERHULST, 1838), que generaliza o modelo de Malthus ao considerar que toda população não poderia crescer indefinidamente, mas que existem inibições naturais em seu crescimento, devendo consequentemente, tender a um valor limite máximo sustentável. No mesmo período foram propostos outros modelos para o crescimento de populações, como por exemplo o modelo de Gompertz (1825). Porém, estes e outros modelos de crescimento propostos inicialmente descrevem as populações que não interagem. Normalmente populações competem pela sobrevivência.

¹Universidade Estadual do Oeste do Paraná-CECE-Toledo. leogui27@yahoo.com.br

²Universidade Estadual do Oeste do Paraná-CECE-Toledo. janterchim@yahoo.com.br

Anos mais tarde, de forma independente, (LOTKA, 1925) e (VOLTERRA, 1926) desenvolveram um modelo para a interação entre espécies, conhecido hoje como modelo de Lotka-Volterra. Este modelo tem servido de base para formular outros modelos matemáticos para descrever fenômenos que evoluem no tempo, como por exemplo, em ciências biológicas e agrárias encontramos estudos que descrevem os modelos parasita-hospedeiro (HOLT et all, 2003), crescimento de plantas e as interações planta-herbívoro (HARMKE et all, 1999) e (RAFIKOV, 2005), em ciências econômicas para descrever as flutuações/oscilações nas bolsas de valores (LOUZOUN; SOLOMON, 2001), em telecomunicações para analisar a competição entre sistemas analógicos e digital (WATANABE et all, 2003), em epidemiologia (BJORNTAD et all, 2002), em imunologia (NOWAK e BAUGHAM, 1996), entre outras aplicações. A utilização desses modelos permite uma avaliação qualitativa e quantitativa do impacto da competição em diferentes populações sejam elas populações de átomos ou moléculas, neurônios, bactérias, pragas ou indivíduos infectados, grupos econômicos ou diferentes sistemas de comunicações.

Por outro lado, nas últimas décadas temos observado um grande progresso nas áreas do cálculo de ordem arbitrário (cálculo fracionário) e sistemas dinâmicos. A importância destas teorias tornou-se evidente com a utilização das equações diferenciais de ordem arbitrário para modelar e descrever diversos fenômenos da natureza, em especial os que possuem dependência temporal, tendo em vista que derivadas fracionárias proporcionam uma excelente descrição para efeitos de memória e propriedades hereditárias (CAPUTO-MAINARDI, 1971), (VASQUEZ, 2004), (CAFAGNA, 2007). Notou-se que, na maioria dos casos, a modelagem feita a partir da equação de ordem não inteiro fornecia uma descrição mais precisa que a respectiva de ordem inteira. Além disso, o desenvolvimento da teoria de fractais abriu novos campos e perspectivas para a teoria da derivada fracionária, especialmente na modelagem de sistemas dinâmicos (MANDELBROT, 1992). Nesta linha de pesquisa, têm aparecido vários artigos mostrando as mais variadas aplicações do cálculo fracionário como por exemplo, problemas quânticos são discutidos através da equação de Schrodinger (GUO-XU, 2006), em sistemas de transmissão elétrica (LORENZO; HARTLEY, 2000), em viscoelasticidade (NEYMANS, 2008), em dinâmica dos fluidos (KULISH; LAGE, 2002), em bioenergia (MAGIN; OVADIA, 2008), na teoria de controle (BOHANNAN, 2008), entre outros.

Por fim, devemos agregar o surgimento de novos métodos qualitativos e quantitativos para o estudo de problemas não lineares. Entre outros, o Método de Perturbação Homotópica (MPH), (HE, 1999), tem sido aplicado com sucesso na análise de soluções das equações diferenciais não lineares. O (MPH) é um acoplamento do método tradicional de perturbação e da teoria da homotopia (da Topologia), o qual consiste em considerar, um valor inicial que vai se aproximando continuamente a solução do problema original através de um parâmetro que converge para a unidade.

O objetivo deste trabalho é aproximar a solução analítica do sistema de Lotka-Volterra, o qual será modelado por equações diferenciais fracionárias e resolvido pelo Método de Perturbação Homotópica (MPH). Os resultados numéricos serão mostrados e analisados.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e propriedades básicas do cálculo fracionário e descrevemos o Método de Perturbação Homotópica que são de fundamental importância no estudo de equações diferenciais de ordem não inteiro.

Definição 1. (PODLUBNY, 1999). Sejam $\alpha > 0$ e $x(t): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua por partes e integrável em qualquer subintervalo de $[0, \infty)$. Então, para $t > 0$ definimos a integral fracionária de ordem α de $x(t)$, segundo Riemann-Liouville, como:

$$I^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds.$$

Definição 2. (PODLUBNY, 1999). Sejam $\beta > 0$; n o menor inteiro maior que β e $\nu = n - \beta$, ou seja, $0 < \nu \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Definimos a derivada fracionária de ordem β de $w(t): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, segundo Caputo, como:

$$D_t^\beta w(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} w^{(n)}(\tau) d\tau, & n-1 < \beta < n \\ \frac{d^n}{dt^n} w(t), & \beta = n \end{cases}$$

Teorema (PODLUBNY, 1999).

a) Se $\rho > 0$ e $\lambda > 0$, então, $D_t^\rho t^{\lambda-1} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\rho)} t^{\lambda-\rho-1}$.

b) $I^\rho t^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\rho+\lambda+1)} t^{\lambda+\rho}$, $\rho > 0, \lambda > -1, t > 0$.

c) $(I^\rho D_t^\rho)x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$, $t > 0, n-1 \leq \rho \leq n, n \in \mathbb{N}$.

2.1 O MÉTODO DE PERTURBAÇÃO HOMOTÓPICA (MPH), (HE, 1999).

Consideremos a seguinte equação diferencial não linear geral,

$$A(y(r, p)) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad (1)$$

com as condições de fronteira: $B\left(y, \frac{\partial y}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Psi$; onde A é um operador diferencial geral, B é um operador da fronteira, $f(r)$ é uma função analítica conhecida e Ψ é a fronteira do domínio Ω . Em geral, o operador A pode ser dividido nas partes linear L e não linear N ; logo, a equação (1) pode-se escrever como: $L(y) + N(y) - f(r) = 0$. A homotopia da equação (1) pode ser definida como sendo a função $y(r, p): \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz,

$$H(y, p) = (1 - p)[L(y) - L(y_0)] + p[A(y) - f(r)] = 0, \quad (2)$$

onde $p \in [0, 1]$ é o parâmetro de inserção e y_0 é uma aproximação inicial da equação (1) que satisfaz as condições de fronteira. Da equação (2) resulta,

$$H(y, 0) = L(y) - L(y_0) = 0 \quad \text{e} \quad L(y, 1) = A(y) - f(r) = 0. \quad (3)$$

Assim, quando p assume todos os valores entre zero e um, $y(r, p)$ varia de $y_0(r)$ para $y(r)$. Segundo (HE, 1999), a solução da equação (2) pode ser expressa como uma série de potências em p , isto é,

$$y(t) = p^0 y_0(t) + p^1 y_1(t) + p^2 y_2(t) + \dots \quad (4)$$

A solução da equação (1) pode ser obtida a partir da equação (4), fazendo $p \rightarrow 1$, isto é,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + \dots \quad (5)$$

A convergência da série (5) pode ser encontrada em (HE, 1999).

3. METODOLOGIA

Nesta seção propomos uma generalização fracionária para o sistema de Lotka-Volterra utilizando derivadas fracionárias no sentido de Caputo, mesmo como a modelagem correspondente mediante o (MPH).

3.1 SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA FRACIONÁRIO.

Consideremos o sistema de Lotka-Volterra fracionário para duas espécies (SAMI et al, 2008)

$$\begin{cases} D_t^\alpha x = x(b_1 + a_{11}x + a_{12}y) \\ D_t^\beta y = y(b_2 + a_{21}x + a_{22}y) \end{cases} \quad (6)$$

onde D_t^α e D_t^β são os operadores diferenciais fracionários no sentido de Caputo, $0 < \alpha, \beta \leq 1$, a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 e b_2 são constantes. Para resolver o sistema (6) mediante o (MPH) utilizamos a equação (2) onde, $L_1 = D_t^\alpha x$, $N_1 = -x(b_1 + a_{11}x + a_{12}y)$,

$L_2 = D_t^\beta y$, $N_2 = -y(b_2 + a_{21}x + a_{22}y)$ e com as condições iniciais $x(0) = \delta$, $y(0) = \gamma$;

de onde resulta,

$$\begin{cases} D_t^\alpha x = px(b_1 + a_{11}x + a_{12}y) \\ D_t^\beta y = py(b_2 + a_{21}x + a_{22}y) \end{cases}, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (7)$$

Segundo o (MPH), a solução do sistema (7) tem a forma de série de potências,

$$x(t) = p^0 x_0(t) + p^1 x_1(t) + p^2 x_2(t) + \dots \quad (8)$$

$$y(t) = p^0 y_0(t) + p^1 y_1(t) + p^2 y_2(t) + \dots \quad (9)$$

Portanto, após substituir (8) e (9) em cada equação de (7), e igualando os termos com potências idênticas em p , resulta um conjunto de sistemas de equações diferenciais fracionárias,

$$p^0: \begin{cases} D_t^\alpha x_0 = 0, \\ D_t^\beta y_0 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$p^1: \begin{cases} D_t^\alpha x_1 = x_0(b_1 + a_{11}x_0 + a_{12}y_0), \\ D_t^\beta y_1 = y_0(b_2 + a_{21}x_0 + a_{22}y_0), \end{cases} \quad (11)$$

$$p^2: \begin{cases} D_t^\alpha x_2 = x_0(a_{11}x_1 + a_{12}y_1) + x_1(b_1 + a_{11}x_0 + a_{12}y_0), \\ D_t^\beta y_2 = y_0(a_{21}x_1 + a_{22}y_1) + y_1(b_2 + a_{21}x_0 + a_{22}y_0), \end{cases} \quad (12)$$

$$p^3: \begin{cases} D_t^\alpha x_3 = x_0(a_{11}x_2 + a_{12}y_2) + x_1(a_{11}x_1 + a_{12}y_1) + x_2(b_1 + a_{11}x_0 + a_{12}y_0), \\ D_t^\beta y_3 = y_0(a_{21}x_2 + a_{22}y_2) + y_1(a_{21}x_1 + a_{22}y_1) + y_2(b_2 + a_{21}x_0 + a_{22}y_0), \end{cases} \quad (13)$$

Os sistemas correspondentes a p^4, p^5, \dots podem ser obtidos de maneira análoga. Aplicando I^α e I^β (operadores inversos dos operadores derivada segundo Caputo D_t^α e D_t^β , respectivamente) em ambos os lados das equações (10)-(13), obtemos,

$$x_0(t) = \delta, y_0(t) = \gamma. \quad (14)$$

$$x_1(t) = \frac{(b_1 + a_{11}\delta + a_{12}\gamma)\delta}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha, \quad y_1(t) = \frac{(b_2 + a_{21}\delta + a_{22}\gamma)\gamma}{\Gamma(1+\beta)} t^\beta. \quad (15)$$

$$x_2(t) = \frac{(b_1 + a_{11}\delta + a_{12}\gamma)(b_1 + 2a_{11}\delta + a_{12}\gamma)\delta}{\Gamma(1+2\alpha)} t^{2\alpha} + \frac{a_{12}(b_2 + a_{21}\delta + a_{22}\gamma)\delta\gamma}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \quad (16)$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = & \left[\frac{(b_1 + 2a_{11}\delta + a_{12}\gamma)^2}{\Gamma(1+3\alpha)} + \frac{a_{11}(b_1 + a_{11}\delta + a_{12}\gamma)\delta\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)} \right] (b_1 + a_{11}\delta + a_{12}\gamma)\delta t^{3\alpha} + \\ & + \delta\gamma a_{12} \left[\frac{(b_1 + 2a_{11}\delta + a_{12}\gamma)(b_2 + a_{21}\delta + a_{22}\gamma) + a_{21}(b_1 + a_{11}\delta + a_{12}\gamma)\delta}{\Gamma(1+2\alpha+\beta)} + \right. \\ & + \left. \frac{(b_1 + a_{11}\delta + a_{12}\gamma)(b_2 + a_{21}\delta + a_{22}\gamma)\Gamma(1+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\alpha+\beta)} \right] t^{2\alpha+\beta} + \\ & + \frac{(b_2 + a_{21}\delta + a_{22}\gamma)(b_2 + a_{21}\delta + 2a_{22}\gamma)a_{12}\delta\gamma}{\Gamma(1+\alpha+2\beta)} t^{\alpha+2\beta}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$y_3(t) = \left[\frac{(b_2 + a_{21}\delta + 2a_{22}\gamma)^2}{\Gamma(1+3\beta)} + \frac{a_{22}(b_2 + a_{21}\delta + a_{22}\gamma)\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+3\beta)} \right] (b_2 + a_{21}\delta + a_{22}\gamma)\gamma t^{3\beta} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \delta \gamma a_{21} \left[\frac{(b_2 + a_{21} \delta + 2a_{22} \gamma)(b_1 + a_{11} \delta + a_{12} \gamma) + a_{12}(b_2 + a_{21} \delta + a_{22} \gamma) \gamma}{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)} + \right. \\
 & + \left. \frac{(b_1 + a_{11} \delta + a_{12} \gamma)(b_2 + a_{21} \delta + a_{22} \gamma) \Gamma(1 + \alpha + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(1 + \beta) \Gamma(1 + \alpha + 2\beta)} \right] t^{2\alpha + \beta} + \\
 & + \frac{(b_1 + a_{11} \delta + a_{12} \gamma)(b_1 + 2a_{11} \delta + a_{12} \gamma) a_{21} \delta \gamma}{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)} t^{2\alpha + \beta}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Os termos $x_4, y_4; x_5, y_5; \dots$, podem ser obtidos de maneira similar. Portanto, a solução analítica aproximada da equação (6), segundo a equação (5), é dada por,

$$x(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \dots$$

$$y(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots$$

4. ANÁLISES E DISCUSSÕES

A fim de ilustrar numericamente os resultados obtidos na seção anterior, consideramos o sistema presa-predador obtido da equação (6), com $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, com as condições iniciais $\delta = 1,3$; $\gamma = 0,6$; para diferentes valores fracionais $\alpha, \beta = 0,25; 0,50; 0,75$ e para a derivada clássica $\alpha, \beta = 1$.

As Fig.1-4 mostram a evolução no tempo das presas $x(t)$ e predadores $y(t)$ obtidas através das equações (14)-(18) e para as condições dadas acima. Nestas gráficas pode-se observar que começando em um estado no qual as duas populações são relativamente pequenas, a população da presa cresce, inicialmente, em virtude da pequena ação predatória. Então, os predadores, com alimentação abundante, também aumentam de população. Isto provoca maior ação predatória e a população da presa tende a diminuir. Finalmente, com o suprimento de alimento diminuído, a população do predador também diminui e o sistema retorna ao estado original.

Além disso, as gráficas mostram a previsão dos encontros dos predadores e presas para os diferentes valores de $\alpha = \beta$. Assim, pode-se ver que à medida que os valores fracionários $\alpha = \beta$ são crescentes, mais tempo será preciso para acontecer os encontros entre ambas espécies, sendo que o maior tempo para o encontro ocorrer, deverá ser quando as derivadas sejam as clássicas, isto é, $\alpha = \beta = 1$. Os resultados em que α é fixo e β varia são bastante similares e por isso não foram mostrados nas figuras.

Fig.1- Gráfica de $x(t)$ e $y(t)$ vs. t para $\alpha = \beta = 0,25$.

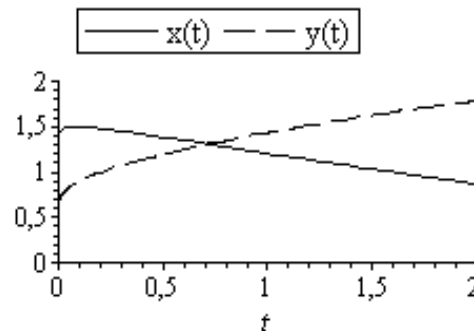


Fig.2- Gráfica de $x(t)$ e $y(t)$ vs. t para $\alpha = \beta = 0,50$.

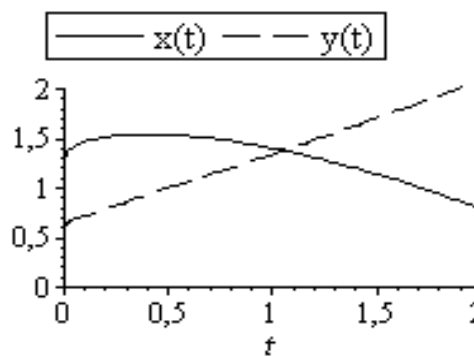


Fig.3- Gráfica de $x(t)$ e $y(t)$ vs. t para $\alpha = \beta = 0,75$.

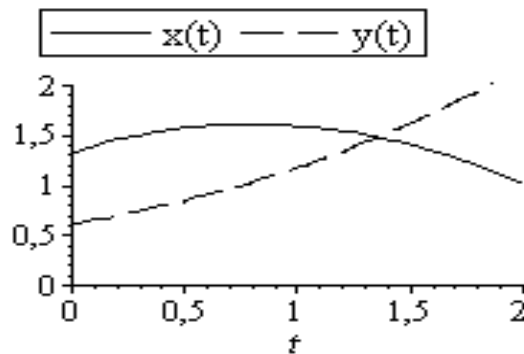
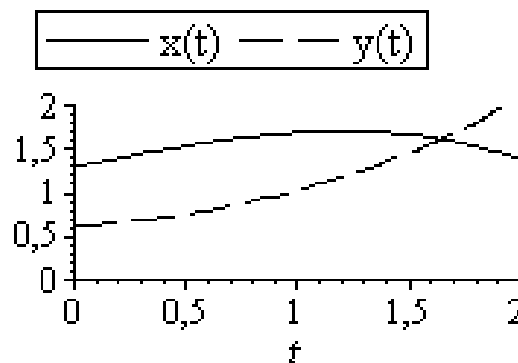


Fig.4- Gráficas de $x(t)$ e $y(t)$ vs. t para $\alpha = \beta = 1$.



5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Temos aplicado o Método de Perturbação Homotópica para o sistema Lotka-Volterra fracionário para duas espécies. As soluções analíticas aproximadas foram representadas pelos primeiros termos de uma expansão assintótica e os resultados numéricos obtidos mostram a eficiência do (MPH) para aproximar as soluções das equações diferenciais não lineares de ordem fracionária.

Ambas espécies são funções periódicas do tempo, sendo que a oscilação do predador segue a oscilação da presa. Outro resultado importante obtido é o tempo requerido para que os encontros entre ambas espécies possam ocorrer. O tempo para o encontro ocorrer será maior a medida que as derivadas fracionárias se aproximam de um. Logo, o modelo fracionário para o sistema presa-predador revela que os encontros entre ambas espécies podem ser antecipados, o que, dependendo do problema que estamos modelando, pode ser uma vantagem significativa do sistema fracionário em relação ao sistema de ordem inteiro.

Por fim, devemos agregar que muito tem sido escrito e pesquisado sobre o sistema Lotka-Volterra, originando uma grande quantidade de modelos alternativos, todos seguindo a modelagem clássica, isto é, utilizando a derivada de ordem inteira. Entretanto, a modelagem usando a derivada fracionária não é muito conhecida; razão pela qual neste trabalho, divulgamos a modelagem de um problema que evolui no tempo mediante o cálculo fracionário.

REFERENCIAS

BJORNSTAD, O.N.; FINKENSTAND, B.F. ; GREFELL, B.T. Dynamics of measles epidemics: estimating scaling of transmission rates using series SIR models. **Ecological Monography**, v.72, p. 69- 184. 2002.

BOHANNAN, G.W. Analog fractional order controller in temperature and motor control applications. **Journal of Vibration and Control**, 14, 1487-1498, 2008.

CAFAGNA, D. Past and Present-fractional calculus: a mathematical tool from the past for present engineers. **IEEE Industrial Electronics Magazine**, 1, 35-40,2007.

CAPUTO,M. and MAINARDI, F. A new Dissipation Model Based on Memory Mechanism. **Pure and Applied Geophysics**, 91, 8, 134-147, 1971.

GUO, X. ; XU, M. Some Physical Applications of Fractional Schrödinger Equation. **J. Math. Phys.**, V. 47, p. 232-276. 1971.

HARMKE, E.J., MIELEKE, D. and FRANK, B. Plant-Herbivore Interaction and Its Consequences for Succession in Wetland Ecosystems: A Modeling Approach, **Ecosystems**, 2, 122-138, 1999.

HE, J.H. Homotopy perturbation technique. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.178, p. 257-262. 1999.

HOLT, R.D, DOBSON, A. P., BEGON, M., BOWER, R. and SCHAUER, E. Parasite Establishment in Host Communities, **Ecology Letters**, 6, 837-842, 2003.

LORENZO, C.F.; HARTLEY, T.T.. Initialized fractional Calculus. **NASA/TP-2000**.

LOUZOUN, Y.; SOLOMON, S. Volatility driven market in a generalized Lotka-Volterra formalism. **Physica, A**, v. 302, p. 220-233. 2001.

MAGIN, R.L.; OVADIA, M. Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus. **Journal of Vibration and Control**, v. 14, p. 1431-1442. 2008.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. Freeman, San Francisco, 1992.

NEYMANS, N. Dynamic measurement in long-memory materials: fractional calculus evolution of approach to steady state. **Journal of Vibration and Control**, v. 14, p. 1587-1596. 2008.

NOWAK, M. and BANGHAM, R.M. Population dynamics of immune responses to persistent viruses. **Science**, 271, 74-79, 1996.

PODLUBNY, I. **Fractional Differential Equation**. Mathematical in Science and Engineering, v. 198. San Diego: Academic Press, 1999.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J.M. Optimal pest control problem in population dynamics. **Computational and Applied Mathematics**, v. 24, p. 323-330. 2005.

SAMI, B. A.; NOORANI, M.; HASHIM, I. Series Solution of the Multispecies Lotka-Volterra Equations by means of the Homotopy Analysis Method. **Diff. Eq. and Nonlinear Mechanics**, v. 2008, p. 1-14. 2008.

VASQUEZ, L. **A Fruitful Interplay: From Nonlocality to Fractional Calculus. Non Linear Waves: Classical and Quantum Aspects**. F. Kh. Abdullaev and V. V. Konotop (Eds.). Kluwer Academic Publishers, 2004.



13º ENCONTRO
CIENTÍFICO CULTURAL
INTERINSTITUCIONAL

MISSÃO DADA É MISSÃO CUMPRIDA

19, 20, 21 E 22 DE OUTUBRO DE 2015



WATANABE, C.; KONDO, R. ; NAGAMATSU, A. Policy option for the diffusion orbit of competitive innovations- an application of Lotka-Volterra equations to Japan's transition from analog to digital TV broadcasting. **Technovation**, v. 23, p. 437-445. 2003.